Title	FANO多様体の諸問題 (複素幾何学の諸問題)
Author(s)	高木, 寛通
Citation	数理解析研究所講究録 (2011), 1731: 106-126
Issue Date	2011-03
URL	http://hdl.handle.net/2433/170575
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第1731巻 2011年 106-126

FANO 多様体の諸問題

高木寛通

CONTENTS

1. はじめに

Fano 多様体論の諸問題は, 結局, Fano 多様体の様々な有限性を研究することと言ってよい. それが具体的になれば分類問題に, もっと大まかであれば, 例えば極小モデルプログラム (MMP) を機能させるために必要な技術的問題などになる. 研究手法は森理論の登場以来本質的には変わっていない. 大きく分ければ, 高次元代数多様体論の二大手法, Fano 多様体上の有理曲線を使う手法 (縮小写像の具体的研究も含む), 消滅定理などを駆使する極小モデル理論の抽象的手法である.[1] 本質的には変わっていないとは言ったが, 技術的には目覚ましい進歩があった. 有理曲線の手法では, 例えば, Kebekus, Mok-Hwang によって構築された有理曲線の接ベクトルの研究 (VMRT の理論), 抽象的方法は, いわゆる論文 [BCHM] による極小モデル理論自体の大きな進歩が Fano 多様体論においても著しい結論をもたらした.

そういった流れを踏まえ, ここでは

- 極小モデル理論における Fano 多様体
- Fano 多様体の分類問題–向井予想を中心として–

[1]今回は, 向井によるベクトル束を使った分類法には触れない.

- Fano 多様体上の極小有理曲線の接ベクトルの研究–VMRT の理論–

の三つに絞り, その背景と諸問題を述べる. 講演を聞いてくださった皆さんやこの概説記事の読者の方々が, Fano 多様体論の一端を垣間見, 下記に挙げた問題を解く, あるいは, それ以外にも適切な問題を自ら見つける一助となれば幸いである.

文献については主要なものは挙げたが, すべてを網羅しているわけではないことをあらかじめお断りしておく.

なお, ここでは基礎体は複素数体に限って説明する. 常に複素数体上の主張が正標数の体でも成立するかという諸問題の定式化は読者の皆さんにお任せする.

予想と問題の $*$ について. 問題と予想に通し番号を付けた. 星については, 少しややこしいが独断で次のように分類してみることにした.

一般的な手がかりが現時点でなく, なおかつ部分的な解決はそれほど意味がないと思われるものを $***$, 一般的には難しそうだが, 特別な場合などに手掛かりがあり部分解決でも十分に意味のあるものを $**$, すでに特別な問題 (次元の小さい場合など) を $*$ とした.

失礼ながら (謝辞以外では) 原則として敬称を略させていただきました. 非礼お詫び申し上げます.

2. 極小モデル理論における Fano 多様体

この章では現在 Fano 多様体について極小モデル理論はどの程度実行可能なのかということをまず説明し, 最後に Fano 多様体が極小モデル理論の構築に大きく関わる可能性 (Fano 多様体の有界性問題) に触れる.

2.1. **用語の定義.** 準射影多様体 X とその上の $\mathbb{R}$-係数有効因子 D の対 (X, D) が**川又端末対 (klt pair)** であるというのは $K_X + D$ が $\mathbb{R}$-Cartier 因子でありそのすべての**食い違い係数 (discrepancy)** が -1 より大きいということである. 食い違い係数の定義はここでは復習しない.[2]

川又端末対 (X, D) において X が射影的であり, $-(K_X + D)$ が豊富な時, (X, D) を **Fano 対**と呼ぶ. $D = 0$ のときは対とは言わず, **川又端末 Fano 多様体**という.

2.2. **物差し付き MMP.** 記念碑的論文

[BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon, and J. McKernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type.* J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 2, 405–468

によって, 任意の次元の射影的川又端末対 (X, D) に対して, 極小モデルプログラム (MMP) が十分な応用をもたらすほどに機能する[3]ようになった. まず川又端末対に対するフリップは常に存在することが示された. フリップの無限列が存在しないという問題は残念ながら完全には未解決であるが, この問題を完全に解ききらなくても, MMP を機能させることを可能にするのが**物差し付き MMP(MMP with scale)** という考え方である.

(X, D) を $\mathbb{Q}$-分解的な川又端末対, A を有効因子で $(X, D+A)$ が川又端末対かつ K_X+D+A がネフとなるものとする. $(K_X + D)$-MMP というのは, (X, D) と双有理同値な森ファイバー空間または極小モデルを出力することを目指すプログラムであるが, $(X, D + A)$ というすでに存在している極小モデル ($K_X + D + A$ はネフだから) を同時に考えるというのが物差し付き MMP のアイデアである.[4] これによって, 極小モデルの有限性とフリップの無限列がない

[2]教科書 János Kollár, 森 重文著「双有理幾何学」(岩波書店) 参照.

[3]フリップが存在して, フリップ列が有限回で止まり, 極小モデルか森ファイバー空間を出力する, という意味.

[4]もともとは Shokurov のアイデアであり, BCHM で花開く. MMP の過程でも次々に極小モデルが登場する.

ことを結びつけることが出来るのである. $(X_1, D_1) := (X, D)$, $A_1 := A$ とおく. $K_X + D$ がネフであれば (X, D) はすでに極小モデルであるので $(K_X + D)$-MMP は終了する. そうでなければ,

$$\lambda_1 := \inf\{t \geq 0 \mid K_{X_1} + D_1 + tA_1 \text{ はネフ }\}$$

とすると $0 < \lambda_1 \leq 1$ である. ここで, $(K_{X_1} + D_1) \cdot R_1 < 0$, $(K_{X_1} + D_1 + \lambda_1 A_1) \cdot R_1 = 0$ となる端射線 R_1 が選べる.[5] よって $(K_X + D)$-MMP を考えているには違いない. R_1 に付随する縮小写像を $f_1 \colon X_1 \to Y_1$ とする. f_1 が双有理的でなければ, f_1 は森ファイバー空間であるのでこの $(K_X + D)$-MMP は終了する. f_1 が因子縮小型であれば, $X_2 := Y_1$, フリップ型であれば, X_2 を X_1 のフリップとする. D_2, A_2 を D_1, A_1 の X_2 上の狭義変換とする. $(K_{X_1} + D_1 + \lambda_1 A_1) \cdot R_1 = 0$ により $(X_2, D_2 + \lambda_1 A_2)$ は川又端末対かつ $K_{X_2} + D_2 + \lambda_1 A_2$ はネフと分かる. よって (X_2, D_2) も川又端末対となっているので, X, D, A を X_2, D_2, $\lambda_1 A_2$ で置き換えて同様のことを考えると,

$$\lambda_2 := \inf\{t \geq 0 \mid K_{X_2} + D_2 + tA_2 \text{ はネフ }\}$$

とすると, $\lambda_2 \leq \lambda_1$ であり, $(K_{X_2} + D_2) \cdot R_2 < 0$, $(K_{X_2} + D_2 + \lambda_2 A_2) \cdot R_2 = 0$ となる端射線 R_2 が選べる. 同様の操作を繰り返せば, フリップまたは因子縮小写像の列 $X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_i \dashrightarrow X_{i+1} \dashrightarrow \cdots$ と非負実数の非増大列 $1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ が得られる. D_i, A_i を D_1, A_1 の X_i 上の狭義変換とする. $(X_i, D_i + \lambda_i A_i)$ は川又端末対かつ $K_{X_i} + D_i + \lambda_i A_i$ はネフ, (X_i, D_i) は川又端末対となっている. 常に $(K_{X_i} + D_i) \cdot R_i < 0$ となる端射線を選んでいるので, これは $(K_X + D)$-MMP でもあり, また $A_i \cdot R_i > 0$ が成り立っている.

定理 1 (BCHM). *もし, D が巨大 (big) であるならば,* [6] *上の物差し付き MMP は機能する. つまり, 最終的に森ファイバー空間か極小モデルを出力する.*

2.3. **擬有効でない対に対する MMP.** 引き続き (X, D) を $\mathbb{Q}$-分解的な川又端末対とする. $K_X + D$ が**擬有効 (pseudo-effective)**[7]でない場合, 特に $-(K_X + D)$ が豊富な場合には, 以下の通り, ある物差し付き MMP によって森ファイバー空間に到達できる.

定理 2. *$K_X + D$ が擬有効でなければ, ある物差し付き $(K_X + D)$-MMP を走らせることによって, X と双有理同値な Y で森ファイバー空間の構造を持つものに到達できる.*

物差し付き MMP の非常に良い応用であるからここに定理の証明を述べておく.

証明. H を X 上の十分一般な豊富因子とし, A を H と $\mathbb{Q}$-線形同値な $\mathbb{Q}$-豊富因子で係数の十分小さなものとする. A は $(X, D + A)$ が川又端末対であり $K_X + D + A$ がネフとなるように選べる. 他方, 十分小さな正の数 ε に対して $(X, D + \varepsilon A)$ も川又端末対であるが, $K_X + D + \varepsilon A$ は擬有効でない. また $D + \varepsilon A$ は定理 1 の D の仮定を満たす. よって, 定理 1 より A を物差しとする $(K_X + D + \varepsilon A)$-MMP は機能する. この場合, $K_X + D + \varepsilon A$ が擬有効でないために, 出力される多様体は $(X, D + \varepsilon A)$ に関して森ファイバー空間の構造を持つ. ところが, A を物差しとしているために, MMP の過程で選ぶ端射線はつねに A の狭義変換と正で交わる. よって, $(K_X + D + \varepsilon A)$-MMP は $(K_X + D)$-MMP でもあり, 特に, $(X, D + \varepsilon A)$ に関する森ファイバー空間の構造は (X, D) に関する森ファイバー空間の構造でもある. □

[BCHM] の主結果は一般型代数多様体の極小モデルの存在であるが, 真逆の世界の多様体に応用があると言うのが興味深い.

---

[5]非自明なこと. 本質的には錐定理と端射線の長さの上限の存在から従う.

[6]この条件の一つの言い換えは, $\mathbb{R}$-係数の豊富因子と有効因子の和に $\mathbb{R}$-線形同値であるということ. D が $\mathbb{Q}$-因子ならば, この言い換えにおいて, $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ にすることが出来る.

[7]擬有効とは数値類が有効因子の極限であるということ.

2.4. **森夢空間.** 川又端末 Fano 対については, 状況はもっと理想的なのである.

定理 3 (BCHM). *川又端末 Fano 対 (X, D) 上の任意の因子 B について, B-MMP, つまり, B と負で交わる端射線の縮小をしたりフリップしたりしていく MMP はいつでも機能する.*

つまり Fano 対は森理論にとって夢のような空間なのである. 定理 3 で述べらているのは, 論文
Y. Hu and S. Keel, *Mori dream spaces and GIT. Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday.* Michigan Math. J. **48** (2000), 331–348
において**森夢空間**と名づけられた多様体のクラスの持つ一性質である. 森夢空間の定義はここではしない.[8]

定理 3 の証明. 定理 3 より幾分弱い主張ではあるが, 任意の B について, うまく物差し A を選べば, A を物差しとする B-MMP が機能するということを定理 2 の証明と同様にして示しておく. さらに B-MMP は $(K_X + D)$-MMP にもなっているように選べる.

B を定数倍で置き換えることで B は整数係数を持つ因子だとしてよい. 自然数 m を $-m(K_X + D) + B$ が豊富でその線形系が固定点を持たないように十分大きく取っておく. $H \in |-m(K_X + D) + B|$ を一般元として, A を H と $\mathbb{Q}$-線形同値な $\mathbb{Q}$-豊富因子で係数の十分小さなものとする. $(X, D + A)$ は川又端末対としてよく, $m \gg 0$ としたので, $K + D + A$ はネフとしてよい. $\frac{1}{m}B$ は $K_X + D + \frac{1}{m}A$ と $\mathbb{Q}$-線形同値. 定理 1 より, A を物差しとする $(K_X + D + \frac{1}{m}A)$-MMP, つまり, B-MMP は機能する. A を物差しとする $(K_X + D + \frac{1}{m}A)$-MMP は $(K_X + D)$-MMP でもある. □

2.5. **Fano 多様体の有界性.** 次元を決めれば非特異 Fano 多様体全体は有界である, すなわち, $\mathbb{C}$ 上有限型のスキームの射 $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ があって, すべての幾何的ファイバーは同じ次元の非特異 Fano 多様体であり, 逆にその次元の非特異 Fano 多様体はすべて π の幾何的ファイバーとして現れる.[9] よって現実的問題はさておき, 原理的にはすべての非特異 Fano 多様体を分類することが可能である.

この結果を特異 Fano 多様体へ拡張した予想を述べる. ε を正の実数とするとき, 川又端末対 (X, D) の食い違い係数がすべて $-1 + \varepsilon$ 以上のとき (X, D) は **ε-川又端末対**であるという. $D = 0$ のとき, $(X, 0)$ が 1-川又端末対ということは X が高々標準特異点のみ持つということに他ならない.

予想 1 (BAB 予想 $***$). *各次元において ε-川又端末 Fano 多様体全体は有界.*

この予想は Alexeev によって曲面の場合に正しいことが証明された (非常に簡略化された証明が論文 V. Alexeev and S. Mori, Bounding Singular Surfaces of General Type である.[10]) また双子の Borisov 兄弟により, toric Fano 多様体でも正しいことが示された.[11] しかし３次元の極小モデル理論が完成してから１５年以上経っているが, 未だに３次元ですら予想は完全な形では未解決である (X が標準特異点を持つ時を除いて). この予想自体簡明で美しいので意義のあるものであるが, むしろ, 極小モデル理論の他の予想, 特にフリップの無限列が存

[8] [BCHM] では川又端末 Fano 対 (X, D) は森夢空間であることが示されている.
[9] F. Campana, *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), no. 5, 539–545
J. Kollár, Y. Miyaoka, and S. Mori, *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds*, J. Differential Geom. **36** (1992), no. 3, 765–779
[10] http://www.math.princeton.edu/ kollar/ にて入手可能.
[11] 予想の名前の命名は Alexeev による.

在しないという予想に関わっているという点でその価値が高められている. 論文
J. McKernan and Y. Prokhorov, *Threefold thresholds*, Manuscripta Math. **114** (2004), no. 3, 281–304
と
C. Birkar, *Ascending chain condition for log canonical thresholds and termination of log flips*, Duke Math. J. **136** (2007), no. 1, 173–180
を合わせると次が分かる.

定理 4. 正の整数 d に対して次の 2 条件を仮定する:
(1) d 次元以下の $\mathbb{Q}$-分解的な因子的端末対に対して *MMP* が機能する.
(2) d 次元以下で *BAB* 予想が *Picard* 数 1, $\mathbb{Q}$-分解的な ε-川又端末的 *Fano* 多様体について正しい.

このとき, $d+1$ 次元以下の有効な対数的標準対に対するフリップの無限列は存在しない.

また, 論文
C. Birkar and V. V. Shokurov, *Mld's vs thresholds and flips*, J. Reine Angew. Math. **638** (2010), 209–234
においては, 次のことが示されている (主定理 1.8 の一部). ここでは次の BAB 予想を弱めた次の予想を考えている.

予想 2 (弱 BAB 予想 $***$). 各次元において標準特異点のみ持つ *Fano* 多様体全体は有界.

定理 5. 正の整数 d に対して次の 3 条件を仮定する:
(1) d 次元以下の $\mathbb{Q}$-分解的な因子的端末対に対して *MMP* が機能する.
(2) d 次元以下で極小対数的食い違い係数 *(minimal log discrepancy (mld))* の集合が昇鎖律を満たす.[12]
(3) d 次元以下で弱 *BAB* 予想が *Picard* 数 1, $\mathbb{Q}$-分解的な *Fano* 多様体について正しい.

このとき, $d+1$ 次元以下の有効な対数的標準対に対するフリップの無限列は存在しない.

次の BAB 予想の特別な場合は Batyrev 予想と呼ばれている.

予想 3 ($**$). 各次元と自然数 m に対して, $-mK_X$ が *Cartier* 因子となる川又端末 *Fano* 多様体全体は有界.[13]

これについては興味深い論文
J. McKernan, *Boundedness of log terminal Fano pairs of bounded index*, arXiv:math/0205214
があるが証明は完成していない模様である.

3. 単線織多様体上の有理曲線族

有理曲線族を使った Fano 多様体の研究について述べる前に射影単線織多様体[14]上の有理曲線族の一般論に少しふれておく. 詳しくは Kollár の教科書

---

[12]正確な statement は原論文参照.
[13]X は $\frac{1}{m}$-川又端末対になることに注意.
[14]n 次元射影多様体 X が**単線織**とは $n-1$ 次元の射影多様体 S と一般有限な有理写像 $\mathbb{P}^1 \times S \dashrightarrow X$ が存在するということ.

J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. 32. Springer-Verlag, Berlin, 1996. viii+320 pp
を参照されたい.[15]

以下, 代数多様体 X の $\mathcal{O}_X$-加群の層 $\mathcal{F}$ と点 $x \in X$ に対して $\mathcal{F}^x := \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$ と書くことにする.[16]

X を n 次元の (非特異とは限らない) 射影単線織多様体とする. X 上にある有理曲線の正規化をほとんど 1:1 にパラメーター付けする可算無限個の (準射影的な) 正規多様体の和集合 $\mathrm{RatCurve}^n(X)$ が存在し,[17] 正規化である非特異有理曲線の族 $\mathrm{Univ}(X) \to \mathrm{RatCurve}^n(X)$ が存在する. これは $\mathbb{P}^1$-束になっている. $\mathrm{RatCurve}^n(X)$ の既約成分 $\mathcal{K}$ に対して, $\rho\colon \mathcal{U} \to \mathcal{K}$ を $\mathrm{Univ}(X) \to \mathrm{RatCurve}^n(X)$ の引き戻し, $\mu\colon \mathcal{U} \to X$ を自然な射影とする. $\mathrm{Locus}\,\mathcal{K} := \mathrm{Im}\,\mu$ と書く.[18]

(3.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{Locus}\,\mathcal{K} \subset X \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \\ \mathcal{K} & & \end{array}$$

X の有理曲線 C に対してその正規化が $\mathcal{K}$ の点に対応しているとき, C は $\mathcal{K}$ **に属する有理曲線**であるという言い方をする. $\mathcal{K}$ が**極小成分**であるとは, μ が支配的, かつ, 一般点 $x \in X$ に対して $\mu^{-1}(x)$ が射影的であるときに言う. 後半の条件は**局所非分裂 (locally unsplit)** と呼ばれている. (必ずしも一般とは限らない) 点 $x \in X$ に対して $\mu^{-1}(x)$ が射影的であるという条件は, x を通り $\mathcal{K}$ に属する有理曲線が既約でない, あるいは, 被約でない有理曲線鎖に退化しないということである. 極小成分に属する X の有理曲線を**極小有理曲線**という.

以下この章では, X は非特異であるとする.

$\mathrm{Univ}(X) \to \mathrm{RatCurve}^n(X)$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)_{\mathrm{red}} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)_{\mathrm{red}}$ を正規化し $\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^1$ の作用で割って構成される. 自然な射影 $F\colon \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)_{\mathrm{red}} \to X$ は, 支配的ならば,[19] ある点 $(p, [f]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)_{\mathrm{red}}$ において非特異射である.[20] よって $(p, [f])$ において $\mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X) \to X$ の Zariski 接空間の写像 $T^p_{\mathbb{P}^1} \times H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X) \to T_X^{f(p)}$ は全射である. ここで, $H^0(\mathbb{P}^1, T_{\mathbb{P}^1}) \to T^p_{\mathbb{P}^1}$ は全射であり, $H^0(\mathbb{P}^1, T_{\mathbb{P}^1})$ の $T_X^{f(p)}$ における像は, $H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X) \to T_X^{f(p)}$ の像に含まれる. こうして $H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X) \to T_X^{f(p)} \simeq (f^*T_X)^p$ は全射であることが分かるので, $f^*T_X \simeq \oplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ と書き表すとき, すべての a_i は非負になる. この条件を f^*T_X が**半正**であるという.[21] f^*T_X が半正であるとき, f を**自由射**, また, f の像, あるいは f そのものを**自由有理曲線**という.

---

[15]主に 4.3 節, 5.2 節, 5.3 節の参考のために書いた. それ以外の部分だけ読む場合は飛ばしても差し支えないと思われる. ただ, できるだけ self-contained によく使われる有理曲線族の結果をコンパクトにまとめてみたつもりである.

[16]一般的な記号ではない. 層の芽と区別するため.

[17]上添え字 ^{n} は正規化 (normalization) の意味

[18]$\mathcal{K}$ の部分集合 S についても同様に $\mathrm{Locus}\,S$ が定義される.

[19]このとき, $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ の既約成分 $\mathcal{H}$ で, $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{H} \to X$ が支配的, かつ, $\mathcal{H}$ の一般点が $\mathbb{P}^1$ から X の像への双有理射に対応しているものがある. 任意の非特異有理曲線からの射の像は有理曲線であるので, その射を正規化に置き換えることが出来るからである.

[20]標数 0 における射の一般非特異性.

[21]逆も成り立つことが容易に分かる. すなわち, f^*T_X が半正であるような $f\colon \mathbb{P}^1 \to X$ があれば, 自然な射影 $\mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)_{\mathrm{red}} \to X$ は支配的.

$\mathcal{K}$を局所非分裂な既約成分として, $x \in \operatorname{Locus}\mathcal{K}$を一般点とすると,

$$\dim X + \deg \mathcal{K} - 3 \leq \dim \mathcal{K} = \dim \operatorname{Locus}\mathcal{K} + \dim \operatorname{Locus}\mathcal{K}_x - 2 \tag{3.2}$$

が成り立つ. 特に

$$\deg \mathcal{K} \leq \dim \operatorname{Locus}\mathcal{K}_x + 1 \tag{3.3}$$

が成り立つ. ここで, $\deg\mathcal{K}$は$\mathcal{K}$に属する任意の有理曲線Cに対して$(-K_X \cdot C)$のこととし,[22] $\mathcal{K}_x = \rho(\mu^{-1}(x))$とおく. これは非常に有用な不等式である.

左側の不等式は有名なHom スキームの次元の評価式からすぐに出る. 右側の等式については, まず, $\mathcal{U} \to \operatorname{Locus}\mathcal{K}$の$x$上のファイバー$\mu^{-1}(x)$の次元が$\dim\mathcal{K}_x$に等しいことはすぐに分かる. 鍵となるのは, 局所非分裂性より$\mu|_{\rho^{-1}(\mathcal{K}_x)}$が一般有限 (generically finite) になると言うことである. これは有名な森の bend and break の帰結である.[23] よって, $\mu|_{\rho^{-1}(\mathcal{K}_x)}$の像が$\operatorname{Locus}\mathcal{K}_x$であるから, $\dim \mu^{-1}(x) = \dim \operatorname{Locus}\mathcal{K}_x - 1$であることが分かる. (3.2) の右の等式はこれから直ちに従う.

$\mathcal{K}$が極小成分であるとする. $\mathcal{U} \to X$は支配的なので$\dim \operatorname{Locus}\mathcal{K} = n$である. Cを$\mathcal{K}$に属する一般の有理曲線とし, $f\colon \mathbb{P}^1 \to C \to X$を$C$の正規化と埋め込み$C \to X$の合成とする. $f^*T_X \simeq \oplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$と書けばすべての$a_i$は非負なのであった. これより, 変形の障害が消えているので$\operatorname{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$は対応する点$[f]$で非特異であり, $[f]$における接空間は$H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X)$に同型である. また, $\mathcal{K}$は$[f]$の属する$\operatorname{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$の既約成分を正規化し$\operatorname{Aut}\mathbb{P}^1$で割ったものなので, Cに対応する点$[C]$で非特異であり, その接空間は$H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X)/H^0(\mathbb{P}^1, T_{\mathbb{P}^1})$に同型である. よって, $[C]$においては (3.2) の左辺は等号である. 同様に, $\operatorname{Hom}(\mathbb{P}^1, X, 0 \mapsto x)$は$[f]$で非特異で, $\mathcal{K}_x$は (必ずしも連結とは限らないが)$[C]$で非特異であることが分かる. さらに, $\operatorname{Hom}(\mathbb{P}^1, X, 0 \mapsto x) \times \mathbb{P}^1 \to \operatorname{Locus}\mathcal{K}_x$は$([f], y)$ $(y \neq 0)$で非特異射であることも分かるから, $\dim \operatorname{Locus}\mathcal{K}_x = \#\{i \mid a_i \geq 1\}$が成り立つ. よって$\deg\mathcal{K} = \sum_{i=1}^n a_i$に注意すれば, (3.2) により$\sum_{i=1}^n a_i = \#\{i \mid a_i \geq 1\} + 1$が成り立つ. これは, ある$0 \leq p \leq n-1$があって

$$f^*T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus p} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-p-1}$$

という形をしているということに他ならない. このようなCまたは射fのことを**標準的有理曲線 (standard rational curve)** と呼ぶ.[24] 整数pはfの取り方によらない有理曲線族$\mathcal{K}$の重要な不変量である.

4. Fano 多様体の分類問題–向井予想を中心として–

4.1. **分類雑題.** 3 次元以下の非特異 Fano 多様体の分類は長い歴史を持ち豊かな数学的題材を提供してきた. 例えば, 3 次元においては特に Picard 数 1 のものをすべて分類するというのは意味のあることだった. 非特異 Fano 多様体に対して,

$$F(X) := \max\{m \in \mathbb{N} \mid (-K_X)/m \in \operatorname{Pic} X\}$$

をXの **Fano 指数**と呼ぶが, Fano 指数 1 の 3 次元非特異 Fano 多様体Xの種数$g(X) = \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 1$は 12 以下であって 11 でないことが知られている. 次の問題は以前, 向井先生にお伺いした.[25]

[22] Cの取り方によらない.

[23] 指定された二点を通り正の次元を持つ族に属する有理曲線は, 有理曲線を成分とする既約でない, または, 被約でないサイクルに退化する.

[24] Kollár の教科書では極小有理曲線と呼んでいるので注意.

[25] Max-Planck で Golyshev がこれを向井の問題と言っていたので, どこかに書いてあるのかもしれない.

問題 4 (***). 次の *Mazur* の定理[26]との関係はあるか？
$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の有限位数の有理点のなす群は次のいずれか：

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\,(1 \le m \le 12, m \ne 11),\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}\,(1 \le m \le 4).$$

これは (少なくとも種数の可能性については) すべてリストアップすることで初めて意味を持つ問題である.

4 次元においても同様の問題を問うことができる.

問題 5 (**). *Picard* 数 1 の 4 次元非特異 *Fano* 多様体を分類せよ.[27]

等質多様体, あるいはなんらかのモジュライ空間の中の完全交叉にならないものはあるか？[28]

しかし, 4 次元以上の非特異 Fano 多様体をすべて分類せよというのは現実的な問題とは言えない. そこで漠然としているが次のような問いを発しておく.

問題 6 ($* \sim **$). 興味深い非特異 *Fano* 多様体のクラスを見つけて分類せよ.

例えば 4 次元ですべての縮小写像がフリップ型であるものなどはエキゾチックで面白い. そのような例は確かに存在する:
H .Sato, *Toward the classification of higher-dimensional toric Fano varieties*, Tohoku Math. J. **52** (2000), 383–413
の４０９ページ, (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) のトーリック多様体がそのような例になっていることを佐藤拓さんから教わった.

これは 4 次元非特異 Fano 多様体の Picard 数の上限問題とも大きく関わっている.[29]

面白い 3 次元非特異 Calabi-Yau 多様体を反標準因子として含むようなものというのも, 散発的かもしれないが面白い問題となり得る. 構成上からするとそうなりそうにない 3 次元非特異 Calabi-Yau 多様体が実は 4 次元非特異 Fano 多様体の反標準因子として含まれていれば意外性があってよい. Calabi-Yau 多様体の Picard 数を 1 とすれば, これは問題 5 とも関わってくる.[30]

3 次元非特異 Fano 多様体の中で, 次数 5 の del Pezzo 三様体 B_5 や向井・梅村三様体 U_{22} は至る所で顔を出す面白い多様体である. そのようなものが高次元でも見つかれば面白い.

4.2. **向井予想とは何か.** 以下では非特異 Fano 多様体の地理学 (geography) 的な問題を考える. 非特異 Fano 多様体全体が有界であることは分かっているが, その地理学はあまり明らかにされていない. 一つの指標となるのがこれから述べる向井予想である.
S. Mukai, *Problems on chracterization of the complex projective space*, Birational Geometry of Albgebraic Varieties Open Problems, The 23th international symposium, division of mathematics, the Taniguchi fundation, August 22 – August 27, Katata, 1988

[26]B. Mazur, *Modular curves and the Eisenstein ideal*, IHES Publ. Math. **47** (1977), 33-186
B. Mazur, *Rational isogenies of prime degree*, Invent. Math. **44** (1978), 129-162

[27]$F(X) = 1$ の場合のみ未解決.

[28]O. Küchle, *On Fano 4-fold of index* 1 *and homogeneous vector bundles over Grassmannians*, Math. Z. **218** (1995), no. 4, 563–575 では Grassmann 多様体上の等質ベクトル束の切断の零点集合として得られるものが分類されている.

[29]4.4 節で挙げた Casagrande の論文を参照.

[30]講演中に小林正典さんから中村亨さんの修士論文の存在を指摘していただきました. 調べてみたところ, 中村さんは $F(X) \ge 2$ なる 4 次元非特異 Fano 多様体の反標準因子となっている 3 次元非特異 Calabi-Yau 多様体のリストを書いていますが, 本質的にそれは向井先生の分類によっています.

まったくの余談ですが, 中村亨さんはテレビの数学番組などで活躍されているようです.

向井予想は次のように Picard 数と Fano 指数の関係を主張する．

予想 7 (向井茂)．

$$(F(X)-1)\rho(X) \leq \dim X$$

が成り立つ．さらに等号が成り立つのは $X \simeq (\mathbb{P}^{F(X)-1})^{\rho(X)}$ のときに限る．

S. Mukai, *Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989), no. 9, 3000–3002

において向井は $F(X)=\dim X-3$ なる非特異 Fano 多様体を $|-K_X/F(X)|$ が非特異元を含むという仮定の下に分類した．[31] その分類表がこの予想を立てる一つのきっかけではなかったかと想像している．

向井予想については多くの論文があり，すべて Fano 多様体上の有理曲線族を主要な技術としている．こうした技術上の観点からすると，Fano 指数よりも次の擬 Fano 指数の方が自然でありこれを用いて精密化された向井予想が定式化された．非特異 Fano 多様体に対して，

$$i(X) := \min\{(-K_X \cdot C) \mid C \text{ は } X \text{ 上の有理曲線}\}$$

を X の**擬 Fano 指数**と呼ぶ．ここで任意の曲線 C に対して $(-K_X/F(X))\cdot C \geq 1$ より，$(-K_X)\cdot C \geq F(X)$，ゆえに，$i(X) \geq F(X)$ であることに注意する．

予想 8 (精密化された向井予想)．

$$(i(X)-1)\rho(X) \leq \dim X$$

が成り立つ．さらに等号が成り立つのは $X \simeq (\mathbb{P}^{i(X)-1})^{\rho(X)}$ のときに限る．

このように定式化してみると，小林-落合の定理[32]を向井予想の特別な場合 (のより精密な結果) と考えれば，次の趙-宮岡-Shepherd-Barron による射影空間の特徴付け，宮岡による二次超曲面の特徴付けが，精密化された向井予想に対応する．

定理 6. *非特異 n 次元 Fano 多様体 X が $i(X) \geq n+1$ を満たすのは X が射影空間のときに限り，$i(X)=n$ を満たすのは X が二次超曲面のときに限る．*[33]

高山さんに次の予想を教わった．

予想 9 (**)．*$n \geq 4$ の時，非特異 n 次元 Fano 多様体 X が $i(X)=n-1$ を満たすのは X が (藤田の意味での) del Pezzo 多様体[34]のときに限る．*[35]

ちなみに，一般には $F(X)$ と $i(X)$ は異なる．[36] 例として $X=\mathbb{P}^a\times\mathbb{P}^b$ ($a+1$, $b+1$ は互いに素，$a>b>0$) を考えると，$F(X)=1$, $i(X)=b+1$ である．

月岡による次の予想を挙げておく．

---

[31]後にこの仮定は Mella と Ambro によって正しいことが独立に示された．

[32]$F(X)=\dim X+1$ ならば X は射影空間，$F(X)=\dim X$ ならば X は二次超曲面．

[33]特に射影空間の特徴付けの方は，他の知られていた他の射影空間の特徴付けをほとんどすべて導くこともさることながら，有理曲線族との相性の良さから Hwang-Mok 理論において重要な役割を果たす．これについては後述する．

[34]$F(X)=n-1$ の Fano 多様体．

[35]一般化された向井予想が正しければ，$i(X)=n-1$ のとき，$n=4$ ならば $\rho(X)\leq 2$, $n\geq 5$ ならば $\rho(X)=1$ となる．よって，この予想は，$n\geq 5$ のとき (定理 6 を含めて) 問題 11 の特別な場合である．これは月岡さんが指摘してくれた．

[36]講演中に月岡さんに指摘された通り．

予想 10 (**). 非特異 *Fano* 多様体 X に対して

$$i(X) = \min_{R_i : X \text{ の端射線}} \{(-K_X \cdot l_i) \mid [l_i] \in R_i, l_i \text{ は有理曲線}\}$$

が成り立つ.

3 次元以下では分類から正しいことが分かり, 4 次元では主要な場合に正しいことが月岡によって示された.

T. Tsukioka, *On the minimal length of extremal rays for Fano 4-folds*, arXiv:1005.1722

向井予想に影響のない Picard 数 1 においてであるが, $F(X)$ と $i(X)$ の関係について次の問題がある.[37]

問題 11 (**). *Picard*数 1 の非特異 *Fano* 多様体 X に対して, $F(X) = i(X)$ か? 特に $F(X) = 1$ ならば $i(X) = 1$ か?

後半は $-K_X$ が非常に豊富な場合, $F(X) = 1$ ならば X 上に直線が存在するか?ということに他ならない. $\dim X = 3$ でこれは正しいが極めて非自明で三次元 Fano 多様体の分類理論の中心的問題であり続けたのはご承知の通りである.

さて, 精密化された向井予想は $\dim X \leq 5$ で正しいことが示されている. また, $i(X) \geq \frac{\dim X+3}{3}$ の場合, X が toric 多様体の場合, X が等質多様体の場合にも正しいことが示されている. 詳細は論文

[NO] C. Novelli and G. Occhetta, *Rational curves and bounds on the Picard number of Fano manifolds*, Geometriae Dedicata, **147**, no. 1, 207-217

及びその中の参考文献を参照のこと. なお, この論文において, 4, 5 次元のときの予想 8 の新証明が与えられているが, その議論を詳しく検討すれば,

問題 12 ($* \sim **$). 6 次元で予想 8 は頑張れば何とかなるのではないか?

4.3. **Novelli-Occhetta の結果.** ここでは, 論文 [NO] の手法を説明する. 今のところ適用に限界があるが, 向井予想の感じをよく伝えていると思われるからである. この手法では, Picard 数を Cartier 因子の数値類が生成するベクトル空間の次元というよりも, 双対的に曲線の数値類のなすベクトル空間の次元と見た方が自然である. X を射影多様体, S をその既約閉集合とするとき, $N_1(X)$ で X 上の曲線の数値類のなすベクトル空間を表し,

$$N_1(S, X) := \mathrm{Im}\,(N_1(S) \to N_1(X))$$

とおく.

コラー-宮岡-森の基礎的な結果[38]により, 次のような有理曲線族が次々に構成される: 一般に $\mathrm{RatCurve}^n(X)$ の部分多様体 S の Chow 多様体における閉包を $\overline{S}$ で表す. まず $\mathrm{RatCurve}^n(X)$ の極小成分 $\mathcal{K}_1$ を一つ選ぶ. $\mathcal{K}_1$ に付随して $\pi_1 \colon X \dashrightarrow Y_1$ なる有理写像が構成される. この有理写像は, Y_1 の開集合上で固有射になっており, その一般ファイバーは, そのファイバー内の一点 x と, $\overline{\mathcal{K}}_1$ の点でパラメーター付けされるサイクルの鎖で結べる点全体である.[39] Y_1 が一点でなければ, $\mathcal{K}_1$ に属する有理曲線と数値的に独立な有理曲線のなす極小成分 $\mathcal{K}_2$ が選べる. $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ に付随して $\pi_2 \colon X \dashrightarrow Y_2$ なる有理写像が構成される. この有理写像は, Y_2 の開集合上で固有射になっており, その一般ファイバーは, そのファイバー内の一点 x と, まず $\overline{\mathcal{K}}_1$ の

[37] Kollár の教科書の V 章, 問題 1.13.

[38] J. Kollár, Y. Miyaoka, and S. Mori, *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds*, J. Differential Geom. **36** (1992), no. 3, 765–779 の定理 2.1.

[39] $X \dashrightarrow Y_1$ のことを $\mathcal{K}_1$ に付随する**有理連結ファイバー空間**と呼ぶ.

点でパラメーター付けされるサイクルの鎖, 次に $\overline{\mathcal{K}}_2$ の点でパラメーター付けされるサイクルの鎖で結べる点全体である. Y_2 が一点でなければ, $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ に属する有理曲線の数値類の線形結合たちと数値的に独立な有理曲線のなす極小成分 $\mathcal{K}_3$ が選べる. 以下繰り返せば, 最終的に有限個の極小成分 $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_m$ であって, それらに属する有理曲線は数値的に線形独立であり, さらに X の任意の 2 点は, 順に, $\overline{\mathcal{K}}_1$ の点でパラメーター付けされるサイクルの鎖, $\overline{\mathcal{K}}_2$ の点でパラメーター付けされるサイクルの鎖, $\ldots$, $\overline{\mathcal{K}}_m$ の点でパラメーター付けされるサイクルの鎖で結べるものが選べる. このとき

$$\dim X \geq \left(\sum_{i=1}^{m} \deg \mathcal{K}_i\right) - m \tag{4.1}$$

なる評価式を得る.[40] さらに $\deg \mathcal{K}_i \geq i(X)$ だから

$$\dim X \geq m(i(X) - 1)$$

という精密化された向井予想と類似の不等式が得られる.[41] もし, 各 $\mathcal{K}_i$ が**準非分裂的 (quasi-unsplit)**, すなわち, $\overline{\mathcal{K}}_i$ に属する有理曲線鎖の各既約成分の数値類が $\mathcal{K}_i$ に属する有理曲線の数値類の定数倍になっているならば, $\rho(X) = m$ が成り立つ.[42] よって求めていた不等式を得る. これが理想的な状況である. 論文 [NO] では, さらに $i(X) \geq \frac{\dim X+3}{3}$ を仮定すると理想的状況になること, つまり, すべての $\mathcal{K}_i$ が準非分裂的となることを示している.

(背理法の仮定として) ある $\mathcal{K}_{i_0}$ が準非分裂的でないとする. 特に $\deg \mathcal{K}_{i_0} \geq 2i(X)$ が成り立つ. これと $i(X) \geq \frac{\dim X+3}{3}$ を考慮すれば, (4.1) により, $m = 1$ であることが分かる. つまり, X の任意の 2 点は $\overline{\mathcal{K}}_1$ でパラメーター付けされるサイクルの鎖で結べる. さらに $\overline{\mathcal{K}}_1$ に属する有理曲線鎖は高々 2 つの既約成分しか持たないことも同時に分かる. ある正の整数 k があって, X のどの 2 点も k 本の $\overline{\mathcal{K}}_1$ に属する有理曲線鎖で結べるとする. 一般点 $x \in X$ に対して, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ を $\overline{\mathcal{K}}_1$ に属する有理曲線鎖で, $x \in \Gamma_1$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset, \ldots, \Gamma_{k-1} \cap \Gamma_k \neq \emptyset$ となるものとする. ある Γ_j の既約成分の数値類が Γ_j の数値類の定数倍でないとして矛盾を導く. そのような Γ_j のうち j が最小のものを Γ_{j_0} とする. さらに j_0 は鎖 $\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ を動かしたとき最小であるとしてよい. Γ_{j_0} は既約ではないが, 上で注意したように二つの既約成分しか持たない. これが結構強い制限を与える. Γ_{j_0} のどちらの成分の数値類も $\mathcal{K}_1$ に属する有理曲線の数値類の定数倍でないことになるからである. x は一般点としたので, x を含む $\overline{\mathcal{K}}_1$ の有理曲線鎖は全て既約である (局所非分裂条件). よって, $j_0 \geq 2$ でなければならない. Γ_{j_0-1} 上の一点 x_1 を, $j_0 = 2$ のときは, $x_1 = x$, $j_0 \geq 3$ のときは, $\Gamma_{j_0-2} \cap \Gamma_{j_0-1}$ の一点とする. Y を $\mathrm{Locus}\,(\mathcal{K}_1)_{x_1}$ の既約成分のうち Γ_{j_0} と交わるものの一つとする. (3.3) より $\dim Y \geq \deg \mathcal{K}_1 - 1$ が成り立つ. さらに $i(X) \geq \frac{\dim X+3}{3}$, $\deg \mathcal{K}_1 \geq 2i(X)$ を考慮すれば, $\dim Y > \dim X - i(X)$ を得る. Γ_{j_0} の既約成分で Y と交わるものを Γ' とする. j_0 の選び方により, x_1 を通る $\overline{\mathcal{K}}_1$ のすべての有理

[40] 基本的に (3.3) から導かれる. 詳しくは, 論文 [ACO] M. Andreatta, E. Chierici, and G. Occhetta, *Generalized Mukai conjecture for special Fano varieties*, Cent. Eur. J. Math. **2** (2004), no. 2, 272–293 の Lemma 5.4 を参照のこと.

[41] この不等式が等式になるとき, $X \simeq (\mathbb{P}^{i(X)-1})^m$ となることが示されている. [NO] の Lemma 4.4 参照. 次の論文の主定理を使う.

G. Occhetta, *A characterization of products of projective spaces*, Canad. Math. Bull. **49** (2006), no. 2, 270–280

[42] 上脚注に挙げた論文 [ACO] の Lemma 4.4 を参照. 準非分裂的という条件により, 各 $\mathcal{K}_i$ に属する有理曲線の退化は, 定数倍を除いて新しい数値類を生み出さない, それによって, X の任意の曲線の数値類は, $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_m$ に属する有理曲線の数値類の線形結合になる.

曲線鎖の既約成分の数値類は Γ_{j_0} の定数倍であるから, Γ' の数値類は $N_1(Y,X)$ に属さない. よって, Γ' の属する有理曲線族を $\mathcal{W}$ とすると

$$\dim \operatorname{Locus} \mathcal{W}_Y \geq \dim Y + (-K_X \cdot \Gamma') - 1 > \dim X - i(X) + i(X) - 1$$

が成り立つ, ここで, $\operatorname{Locus} \mathcal{W}_Y$ は Y の各点と $\mathcal{W}$ に属する有理曲線で結べる点全体である. 結局, $\operatorname{Locus} \mathcal{W}_Y = X$, つまり, $\mathcal{W}$ は支配的な有理曲線族となるが, これは, $\mathcal{K}_1$ の極小性に反する.

問題 13 (**). $i(X) = \frac{n+2}{3}$, $\frac{n+1}{3}$ のとき X を分類せよ.[43] $\rho(X) \geq 2$ ならばどうか?

4.4. **Casagrande の結果–BCHM の応用–.** 論文
C. Casagrande, *On the Picard number of divisors in Fano manifolds*, arXiv:0905.3239
においては, 決定的ではないものの, 精密化された向井予想について興味深い考察がなされている. 現在のところ, [BCHM] の Fano 多様体への数少ない応用の一つでもあるのでここで取り上げておく (論文中の定理 1.6). なお, これが論文の主結果ではない. 論文では, 向井予想というより Picard 数自体の上限を求める (特に 4 次元) ことを目指している. 非特異 Fano 多様体の Picard 数に関する興味深い予想 (論文中の予想 1.2) も書いてあるので読まれたい. この論文によれば, 4 次元非特異 Fano 多様体でフリップ型の縮小写像のみものの Picard 数の上限を求めるのは難しい問題であるようだ.

X を射影多様体, S をその既約閉集合とするとき, $\rho(X) - \rho(S) \leq \operatorname{codim} N_1(S,X)$ が常に成り立つことに注意する.[44]

定理 7. X を非特異 *Fano* 多様体で擬 *Fano* 指数 $i(X)$ が 1 よりも大きいものとする. この時, 次のいずれかが成立する.

(1) $i(X) = 2$ であり, X は非特異 *Fano* 多様体 Z 上の $\mathbb{P}^1$-束の構造を持ち, Z の擬 *Fano* 指数は 1 より大きい.[45]
(2) X のすべての素因子 D について $N_1(D,X) = N_1(X)$ が成り立つ. 従って特に $\rho(X) \leq \rho(D)$, また, 双対を取れば制限写像 $N^1(X) \to N^1(D)$ は単射である.[46]

証明の概略. まずは, X を ($i(X) > 1$ とは限らない) 非特異 Fano 多様体, D をその上の素因子とする. 定理 3 の証明の通り, ある $-D$-MMP で K_X-MMP となっているものが機能する. X は Fano 多様体であるから MMP は最後に X と双有理的な多様体 Y で森ファイバー空間の構造 $Y \to Z$ を持つものを出力して終わる. この MMP の過程で $N_1(D,X)$ の余次元がどう変わっていくかを追跡する. まず, D の Y における狭義変換を D_Y とすると, 端射線が D_Y と正の交点数を持つので $D_Y \to Z$ は全射. これと, 端射線縮小写像の性質より $\rho(Y) - \rho(Z) = 1$ であることから, $\operatorname{codim} N_1(D_Y, Y) \leq 1$ が分かる. X_i を MMP の途中に出てくる (X と双有理的な) 多様体とし, $X_i \to Y_i$ を選ばれた端射線 R_i に付随する縮小写像とする. $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ を, $X_i \to Y_i$ がフリップ型ならばそのフリップ, 因子縮小写像ならば, $X_i \to Y_i$ そのものとする. X_i, X_{i+1} における D の狭義変換を D_i, D_{i+1} とする. もし, $R_i \subset N_1(D_i, X_i)$ ならば $\operatorname{codim} N_1(D_i, X_i) = \operatorname{codim} N_1(D_{i+1}, X_{i+1})$, そうでなければ, $\operatorname{codim} N_1(D_i, X_i) - 1 = \operatorname{codim} N_1(D_{i+1}, X_{i+1})$ であることが分かる. よって, $\operatorname{codim} N_1(D_Y, Y) \leq 1$ と合わせれば,

[43]後者の場合, $n = 5$ のとき部分的分類がある. Occhetta 一派.

[44]右辺は 4.3 節で定義した.

[45]Y について予想 8 が成り立てば X についても成り立つことが比較的容易に示される. よってこの場合は次元についての帰納法で扱える.

[46]これより任意の二つの素因子は必ず交わる. (2) の場合は特に Picard 数の情報は与えないが, それでもこの事実により, Picard 数がそれほど大きくなりそうにない雰囲気は出ている.

$\operatorname{codim} N_1(D, X)$ は $R_i \not\subset N_1(D_i, X_i)$ なる端射線の数から計算できる. $R_i \not\subset N_1(D_i, X_i)$ という条件はかなり縮小写像に制限を与える. まず, $X_i \to Y_i$ でつぶれる曲線は D_i に含まれないので, $X_i \to Y_i$ の非自明なファイバーの既約成分 l は 1 次元と分かる. また, X が非特異であり端射線が常に D と正で交わるように選ばれているので $\operatorname{Sing} X_i \subset D_i$ が成り立ち, $X_i \dashrightarrow X$ が定義されていない部分集合も D_i に含まれる. 従って l は $\operatorname{Sing} X_i$ に含まれず, また, X 上の曲線の狭義変換である. これにより, $-K_{X_i} \cdot l \le 1$ が分かる.[47] もし l が $\operatorname{Sing} X_i$ と交わるのであれば, $X \dashrightarrow X_i$ の MMP の過程で l の狭義変換は, フリップ型縮小写像のフリップ曲線または因子縮小写像の例外因子と交わることとなり, X 上の狭義変換と $-K_X$ の交点数が負になってしまう (ネフ例外因子補題[48]というものの帰結). これは X が Fano であることに反する. よって l は $\operatorname{Sing} X_i$ と交わらない. ここまで来ると, $X_i \to Y_i$ が Y_i における $\operatorname{Sing} Y_i$ と交わらない非特異な余次元 2 の多様体の爆発であることは容易に分かる. さらにネフ例外因子補題により, $R_i \not\subset N_1(D_i, X_i)$ となる $X_i \to Y_i$ の例外因子の X 上の狭義変換たちは互いに交わらないことも分かる.

さて, ここで擬 Fano 指数 $i(X)$ が 1 よりも大きいと仮定する. もし, MMP の途中で $R_i \not\subset N_1(D_i, X_i)$ となることがあれば $X_i \to Y_i$ の例外因子の X 上の狭義変換は $-K_X$ との交点数が 1 の曲線を含んでしまい矛盾である. これにより, $\operatorname{codim} N_1(D, X) = \operatorname{codim} N_1(D_Y, Y) \le 1$. が分かる. $\operatorname{codim} N_1(D_Y, Y) = 1$ であるとすると, D_Y は $Y \to Z$ でつぶれる曲線を含まないので, $Y \to Z$ のすべてのファイバーの次元は 1 であることが分かる. さらにネフ例外因子補題と $i(X) \ge 2$ という仮定により, $X = Y$ かつ $X \to Z$ は $\mathbb{P}^1$-束であることが分かる. □

5. Fano 多様体上の極小有理曲線の接ベクトルの研究 –VMRT の理論–

5.1. VMRT とは何か. Kebekus の重要な寄与を踏まえ, Hwang と Mok は一連の論文で, 有理曲線の接ベクトルの理論を構築した.

$\mathbb{P}(T_X^*)$ で X の接束の射影化を表す.[49] これは Grothendieck の記法である. $\mathbb{P}(T_X)$ や $\mathbb{P}^*(T_X)$ で表されているものも多いので注意. 混乱を避けるため, ベクトル空間 V の 1 次元部分空間をパラメーター付けする射影空間を $\mathbb{P}_*(V)$ で表すことにする.

$\operatorname{RatCurve}^n(X)$ の極小成分 $\mathcal{K}$ に対して, 有理写像 $\tau\colon \mathcal{U} \dashrightarrow \mathbb{P}(T_X^*)$ を次のように定義する: $\alpha \in \mathcal{U}$ で $\rho(\alpha)$ が点 $x := \mu(\alpha)$ で非特異な有理曲線 C に対応する点であるものに対して, x における C の接ベクトルに対応する $\mathbb{P}(T_X^*)$ の点を対応させる. この有理写像の像の閉包を $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}(T_X^*)$ で表す. 自然な射影 $\pi\colon \mathcal{C} \subset \mathbb{P}(T_X^*) \to X$ の点 x 上のファイバーを $\mathcal{C}_x$ で表し, x における**極小有理曲線の接ベクトル多様体 (Variety of Minimal Rational Tangents)**, 略して, **VMRT** と呼び, $\mathcal{C}$ のことをその**全空間**という.

τ が生成有限的であることは bend and break により分かる. 一般点 $x \in X$ に対して $\mathcal{K}_x$ は非特異 p 次元多様体の非連結和であることが分かる. ここで p は $\mathcal{K}$ に属する標準的有理曲線 $f\colon \mathbb{P}^1 \to X$ に対して,

$$f^*T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus p} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-p-1}$$

と書いた時に出てくる p である. τ により有理写像 $\mu^{-1}(x) \dashrightarrow \mathcal{C}_x$ が引き起こされるが, 自然な射 $\mu^{-1}(x) \to \mathcal{K}_x$ は双有理写像なので, $\mathcal{K}_x \dashrightarrow \mathcal{C}_x$ が誘導される. Kebekus はこれが有限射になることを示した. 特に $\mathcal{C}_x$ のすべての既約成分は p 次元である.

---

[47]S. Mori, *Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds*, J. Am. Soc. Sci., **1** (1988) 117-253 の 1.3 と 2.3.2.

[48]Kollár-森の教科書の 3 章, 補題 3.39. 簡単な事実だが非常に有用.

[49]T_X は接層, T_X^* はその双対.

S. Kebekus, *Families of singular rational curves*, J. Algebraic Geom. **11** (2002), no. 2, 245–256
VMRT の理論は X 上の有理曲線の幾何を $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}_*(T_X^x)$ の射影幾何の問題に翻訳できるときに威力を発揮する．例えば次のような問題である．

予想 14 (∗∗). *X を Picard 数 1 の非特異 Fano 多様体，S を Picard 数 1 の有理等質多様体とする．それぞれ有理曲線の極小成分を固定しておく．*[50] *一般の $x \in X$ における VMRT $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}_*(T_X^x)$ が，ある $s \in S$*[51]*における VMRT $\mathcal{C}'_s \subset \mathbb{P}_*(T_S^s)$ と (射影多様体として) 同型ならば，$X \simeq S$.*

Mok は，エルミート対称空間，接触等質多様体のときに予想 14 が正しいことを示した．
N. Mok, *Recognizing certain rational homogeneous manifolds of Picard number 1 from their varieties of minimal rational tangents*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **42**, 41-61
さらに，Hong-Hwang により，long simple root に対応する有理等質多様体の場合にも予想 14 が正しいことが示された．
J. Hong and J. Hwang, *Characterization of the rational homogeneous space associated to a long simple root by its variety of minimal rational tangents*, Algebraic geometry in East Asia-Hanoi 2005, Advanced Studies of Pure Mathematics, **50**, 217–236.
趙-宮岡-Shepherd-Barron による射影空間の特徴づけ，宮岡による二次超曲面の特徴づけはこの問題の重要な場合の解決を含む．

定理 8. *非特異射影多様体 X のある VMRT について，一般点 x の $\mathcal{C}_x$ が $\mathbb{P}_*(T_X^x)$ に一致するならば，*[52] *X は射影空間と同型であり，考えている極小成分は直線の族．*
より一般に正規射影多様体 X のある VMRT について，一般点 x の $\mathcal{C}_x$ が $\mathbb{P}_*(T_X^x)$ に一致するならば，射影空間からの有限全射が存在して X の非特異点上では不分岐．考えている極小成分に属する有理曲線は，射影空間の直線の像．

K. Cho, Y. Miyaoka, N. I. Shepherd-Barron, *Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds*, Higher dimensional birational geometry (Kyoto, 1997), 1–88, Adv. Stud. Pure Math., **35**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002

S. Kebekus, *Characterizing the projective space after Cho, Miyaoka and Shepherd-Barron*, Complex geometry (Göttingen, 2000), 147–155, Springer, Berlin, 2002
この定理は VMRT の理論からすると非常に特殊な場合を扱っているが，5.3 節で見るように VMRT の理論の基礎付けにおいて非常に重要な役割を果たす．

定理 9. *Picard 数 1 の非特異な Fano 多様体 X のある VMRT について，一般点 x の $\mathcal{C}_x$ が $\mathbb{P}_*(T_X^x)$ の超曲面ならば X は二次超曲面に同型．*

Y. Miyaoka, *Numerical characterisations of hyperquadrics*, Adv. Stud. Pure Math. **42**, Math. Soc. Japan, Tokyo (2004) 209–235
以上の例のように X が等質多様体あるいはそれに同型だと期待される場合には一点 x での $\mathcal{C}_x$ が X の大域的な情報を与えることになるので特に VMRT の理論が有効になると考えられる．

[50] S については直線の族を一つ選ぶことに他ならない．
[51] S は等質なので結局任意の点でよい．
[52] 定理 6 の仮定からこの仮定が導かれることが分かる．

5.2. **Hwang 氏の小粋な結果たち.** Hwang は, VMRT を使うことにより, 次のよく知られた予想たちを, 次元の小さい場合ではあるが小気味よく解決した. 予想とともに Hwang の結果を紹介する.

予想 15 (**). *Picard* 数 1 の非特異 *Fano* 多様体の接束は安定的.

まず, 任意の次元 n に対して, 定理 8, 9 により $p = n-2, n-1$ の場合に予想は正しい. また, Reid が $F(X) = 1$ ならば予想が正しいことを示し, Peternell と Wiśniewski が $F(X) \geq \dim X - 2$ のとき X の分類を使って予想が正しいことを示していた.

Hwang は, これらの先行結果を補うことで, 5 次元以下で予想が正しいこと, 6 次元では接束が半安定であることを示した.

J. Hwang, *Stability of tangent bundles of low-dimensional Fano manifolds with Picard number 1*, Math. Ann. **312** (1998), no. 4, 599–606

証明の概略. まずは X を任意の次元の Picard 数 1 の非特異 Fano 多様体とする. Picard 数が 1 という仮定により, ねじれを持たない層 $\mathcal{E}$ の slope を $\mathcal{K}$ に属する有理曲線 C を用いて, $\mu(\mathcal{E}) := \frac{c_1(\mathcal{E})\cdot C}{\operatorname{rank}\mathcal{E}}$ と定義してよい. 5.1 節の p を用いれば, $\mu(T_X) = \frac{p+2}{n}$ である. T_X が安定的でないとしてその極大不安定化層を $\mathcal{F}$, その階数を r とする. $r=1$ とすると $\mathcal{F}$ は豊富な可逆層となり,「豊富な可逆層を接束が含めば射影空間と同型」という Wahl の定理により T_X は安定的となって矛盾. よって, $r \geq 2$ が成り立つ. また, $\mathcal{F}$ は X の Zariski 開集合上で可積分であることが分かる. C を $\mathcal{K}$ に属する一般的な有理曲線, 特に標準的とする. $\mathcal{F}|_C \subset T_X|_C$ であり, この余核はねじれを持たないとしてよい. よって, $\mathcal{F}|_C = \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ $(a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r)$ と表す時, すべての a_i は 2 以下である. また $\mu(\mathcal{F}) > \mu(T_X) > 0$ より $a_1 > 0$ である. 実はすべての a_i は 1 以下であることが分かる. なぜならば, $T_X|_C$ の形より, 2 となり得るのは a_1 のみで, そのとき C は $\mathcal{F}$ に接している. $\mathcal{F}$ は可積分であるから C はその葉に含まれる. $r < n$ であるからこれにより $\mathcal{K}$ に付随する有理連結ファイバー空間の底空間は次元を持ってしまう. これは Picard 数が 1 という仮定に反する. こうして $\mu(\mathcal{F}) = \frac{\sum a_i}{r} \leq 1$ が分かる.

この議論から $p=0$ ならば T_X は安定的であることが分かる. 実際, T_X が安定的でないとすると, $\mathcal{F}|_C$ の $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ 成分は $T_X|_C$ の $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ に含まれなくてはならず, これでは $\mathcal{F}|_C \subset T_X|_C$ の余核がねじれを持たざるを得ず矛盾である.

$n = 6$ とする. $p = 0, 4, 5$ はすでに片付いている. $p = 3$ のときは, $\deg\mathcal{K} = 5$ により $F(X) = 1$ または 5 であるが, $F(X) = 1$ ならば Reid, $F(X) = 5$ ならば Peternell と Wiśniewski の結果により T_X は安定的. $p=1$ のとき, $T_X|_C$ の形より $a_1 = 1$, $a_i \leq 0$ $(i \geq 2)$ となるが, $\mu(\mathcal{F}) > 0$ より, $a_i = 0$ $(i \geq 2)$ である. よって $\mu(\mathcal{F}) = \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$. 他方, $\mu(T_X) = \frac{3}{6}$ より, $\mu(\mathcal{F}) = \mu(T_X)$ となるしかない. つまり T_X は半安定的. $p=2$ のとき, つまり, $\mathcal{C}_x$ が曲面の時がもっとも工夫を要する. $\mathcal{C}_x$ の詳細な射影幾何的な考察をする.[53] このとき $n=6$ に限らず $n>4$ という仮定の下, $\mu(\mathcal{F}) < 1$ が成り立つことを示すのである. これさえ示せれば, $\mathcal{F}|_C$ の成分の簡単な enumeration によって $\mu(\mathcal{F}) = \mu(T_X)$ と分かり, T_X が半安定的なことが分かる. $\mu(\mathcal{F}) = 1$ と仮定して矛盾を導く. この時, $\mathcal{F}$ の葉の正規化が $\mathbb{P}^2$ になることが分かる. こうして $\mathcal{C}_x$ が $\mathbb{P}^2$ であることが分かりそれが定める distribution [54] $\mathcal{F}'$ は可積分となる. しかし, C はその葉に含まれ, $\operatorname{rank}\mathcal{F}' < n$ であるから $\mathcal{K}$ に付随する有理連結ファイバー空間の底空間は次元を持ってしまう. これは Picard 数が 1 という仮定に反する. □

予想 16 (**). *Picard* 数 1 の n 次元非特異 *Fano* 多様体 X に対して $(-K_X)^n \leq (n+1)^n$ が成り立ち, 等号が成り立つことと $X \simeq \mathbb{P}^n$ であることは同値である.

[53]VMRT の fundamental な問題 21 と 23 が解決すれば議論は随分簡略化される.

[54]接束の飽和的 (saturated) な部分層のこと.

J. Hwang, *On the degrees of Fano four-folds of Picard number 1*, J. Reine Angew. Math. **556** (2003), 225–235
において, Hwang は 4 次元で予想が正しいことを示した.[55]

証明の概略. 接束が安定なことは分かっているので, Bogomolov 不等式により $8(-K_X)^2c_2(X) \geq 3(-K_X)^4$, また Riemann-Roch の定理より $\dim|-K_X| = \frac{(-K_X)^4}{6} + \frac{(-K_X)^2c_2(X)}{12}$ が成り立つ. よって $\dim|-K_X| \geq \frac{19}{96}(-K_X)^4$ となるので $\dim|-K_X|$ を評価すればよい. $\dim\mathcal{C}_x = 0,1,2,3$ であるが $\dim\mathcal{C}_x = 2,3$ のときは定理 8, 9 より解決済み. ここでは $\dim\mathcal{C}_x = 1$ のときの概略を述べる. $F(X) = 4,3,2$ の時は分類が知られており予想は直接確かめられる. よって, $F(X) = 1$, 特に $|-K_X|$ の元はすべて既約としてよい. 古典的に知られている論法に沿って, $\dim|-K_X|$ が大きすぎると, 重複度の高い特異点を持った $|-K_X|$ の元が存在し, 果てには, その元が既約成分を二つ以上持つことになって $F(X) = 1$ に矛盾することを示す. 予想を示すためには $\dim|-K_X| \leq 120$ を示せばよい. $\dim|-K_X| > 120$ として矛盾を導く. $\mathcal{C}_x$ が空間曲線であることから $\mathcal{C}_x$ で消える同次 k 次式のベクトル空間の次元は $k \geq 2$ のとき $\frac{1}{6}(k^3+6k^2-k-6)$ 以下と評価できる.[56] この評価式と $\dim|-K_X| > 120$ という仮定から X の任意の一般の二点 x, y において重複度が 5 以上となる $|-K_X|$ の元からなるペンシルが存在することが分かる. 実際, まず, $\mathbb{P}_*(T_X^x) \simeq \mathbb{P}^3$ における 3 次以下の同次式のベクトル空間の次元の和は 35 である. 次に $\deg\mathcal{K} = 3$ に注意. よって x で重複度が 4 以上の $|-K_X|$ の元 D は $\mathcal{K}_x$ に属する有理曲線をすべて含む. ゆえに $\mathbb{P}_*(T_X^x)$ の同次 4 次式のベクトル空間については $\mathcal{C}_x$ を含むものの次元を評価すればよく, 上記評価式より 25 以下と分かる. よって $\dim|-K_X| > 2(35+25) = 120$ により, 求めるペンシルが得られる.

S_x を $\mathcal{K}_x$ に属する有理曲線の覆う部分集合の閉包とする. $\dim S_x = 2$ である. さらに一般の $\mathcal{K}_x$ に属する C に対して M_C を $\cup_{y\in C}S_y$ の閉包とすると M_C は 3 次元の成分 H を持つことが分かる.[57] $x, y \in C$ を一般の二点として上のような $|-K_X|$ におけるペンシルを取る. Nadel の積定理の一般化 (命題 10) によりペンシルに属する $|-K_X|$ の元は C に沿って少なくとも重複度 4 であることが分かる. ところが H は C と交わる $\mathcal{K}$ の元で覆われているから H はペンシルの固定成分でなくてはならない. しかし, これは $F(X) = 1$ に反する. □

Nadel の積定理はもともと Nadel によって Picard 数 1 の非特異 Fano 多様体の有界性を示す際に発見された.

命題 10. X を複素多様体, $C \subset X$ を有理曲線, L を X 上の因子とする. $\nu\colon \mathbb{P}^1 \to C$ を C の正規化として, $\nu^*T_X = \sum_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ と書き表す. $d \leq \min\{a_1,\ldots,a_n\}$ となる d をとる.[58] このとき, 任意の $|L|$ の元 D と, 任意の有限個の点 $x_1,\ldots,x_m \in C$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^m (m_{x_i}(D) - m_C(D)) \leq C\cdot L - d\cdot m_C(D),$$

ただし, $m_{x_i}(D)$, $m_C(D)$ はそれぞれ D の x_i における重複度, C に沿っての重複度[59]である.

---

[55] 5 次元においては渡辺究さんが $(-K_X)^5 \leq 9^5$ という評価を得ている. K. Watanabe, *Lengths of chains of minimal rational curves on Fano manifolds*, arXiv:1010.2002, to appear in Journal of Algebra

[56] 実際は $\mathcal{C}_x$ が直線を含めば全ての成分が直線でその本数は 3 以上など, やや細かい情報も必要. 下記の VMRT の fundamental な問題 21 と 23 が解決すれば議論は随分簡略化される.

[57] ここもやや細かい議論が必要である.

[58] 極小有理曲線の時は $d = 0$ と取れる.

[59] C の一般点での重複度. したがって, $m_{x_i}(D) \geq m_C(D)$.

証明. $k_i := m_{x_i}(D)$, $l := m_C(D)$ とおく. D によって l-jet 束の引き戻し $\nu^*(\mathrm{Sym}^l T_X^* \otimes L)$ の大域切断が定まるが, これは各 x_i で重複度 $k_i - l$ を持つ. $\nu^*(\mathrm{Sym}^l T_X^* \otimes L)$ の各直和成分の次数は $L \cdot C - ld$ 以下であるから, $\sum_{i=1}^m (k_i - l) \le C \cdot L - dl$. □

なお, 非特異とは限らない Fano 多様体 X の次数 $(-K_X)^{\dim X}$ を上から評価[60]する新しい方法 (有理曲線は使わない) を Ran と Clemens が発見した.
Z. Ran, H. Clemens, *A New Method in Fano Geometry*, Int Math Res Notices (2000) 2000 (10): 527-549
大変興味深いのだが, 残念ながら今のところ後継者がいない.

予想 17 (Campana-Peternell[61] $**$). *非特異 Fano 多様体 X に対して, その上のすべての有理曲線が自由ならば, X は有理等質多様体である. 特に T_X がネフなベクトル束ならば X は有理等質多様体.*

まず, 予想の仮定の下, 図式 (3.1) は非常にきれいな性質を持つことに注意しておく: $\mathcal{K}$ は射影的[62]であり, μ の全てのファイバーは同じ次元を持った (連結とは限らない) 非特異多様体となる.[63]
J. Hwang, *Rigidity of rational homogeneous spaces*, International Congress of Mathematicians. Vol. II, 613–626, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006
において Hwang は 4 次元で予想が正しいことを示した. ただ, 核心部において Mok の結果
N. Mok, *On Fano manifolds with nef tangent bundles admitting 1-dimensional varieties of minimal rational tangents*, Trans. A.M.S. **354** (2002), 2639-2658
と, 予想 14 のエルミート対称空間, 接触等質多様体の場合の解決を一部使うので, 二人による解決というべきかもしれない.[64]

証明の概略. 4 次元の場合, 予想は Picard 数 > 1 において Campana-Peternell が解決していた. 一般に Picard 数 > 1 の場合の方が手掛かりがありそうなので次を問題として挙げておく.

問題 18 ($**$). *Picard 数 2 以上の場合に予想 17 を示せ.*

そこで Picard 数が 1 とする. $\dim \mathcal{C}_x \le 3$ であるが, $\dim \mathcal{C}_x = 3, 2$ のときは定理 8, 9 によって直ちに予想が正しいことが分かる. 結局この二つの場合しか起こらないことを示すことになるのだが, $\dim \mathcal{C}_x = 0$ のときには, 上記の通り μ は非特異射であるので不分岐有限射になるが, X は単連結なので μ は同型でなくてはならない. ところが, $\mathcal{U}$ は $\mathbb{P}^1$-束の構造を持つので X の Picard 数が 1 であるという仮定に反する. $\dim \mathcal{C}_x = 1$ のときが Mok の論文で研究されている場合である. Mok は予想の仮定の下 (4 次元とは限らない), 図式 (3.1) を詳細に調べることで, $\mathcal{C}_x$ が $\mathbb{P}^3$ において次数 3 以下の非特異有理曲線であることを示した.[65] 予想 14 がエルミート対称空間, 接触等質多様体のときに正しいことを踏まえて議論すれば, $\mathcal{C}_x$ が直線ならば $X \simeq \mathbb{P}^2$, $\mathcal{C}_x$ が二次曲線ならば $X \simeq Q^3$, $\mathcal{C}_x$ がねじれ三次曲線ならば X は (5 次元)G_2 多様体ということが分かる. いずれも 4 次元ではない. □

[60]これは予想 3 とも関係している.

[61]F. Campana and T. Peternell, *Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective*, Math. Ann. Vol. 289, Number 1, 169-187

[62]すべての有理曲線が自由だから, もし有理曲線が退化して分解すると, 分解したものが変形して X を覆いつくしてしまう. これは $\mathcal{K}$ の最小性に反する.

[63] 3 章の最後の議論.

[64]Mok が仮定していた位相的な条件を Hwang が取り払った.

[65]μ のファイバーが $\mathbb{P}^1$ であることは容易に出る. 次数を抑えるところが核心部であるが, そのために ρ が $\mathcal{K}$ 上の階数 2 安定ベクトル束に付随していることを示している.

問題 19 $(* \sim **)$. 他にもこのように 4，5 次元あたりで *VMRT* が有効な問題を探そう．特に 4 次元では空間曲線，5 次元では $\mathbb{P}^4$ の曲面の射影幾何が生かせれば面白い．

問題 6 の続きとして次を挙げておく．

問題 20 $(* \sim **)$. 正の次元を持った意外な多様体 Z を $\mathcal{C}_x$ として持つ *Fano* 多様体 X を構成せよ.[66]

この問題に関して, 渡辺究さんから, 非特異な任意の射影多様体 Z を VMRT に持つ非特異射影多様体 X の Hwang による構成[67]を教わった．非常に簡単な構成なのでここに挙げておく．ただし, X は一般に Fano ではない．

例 11. $Z \subset \mathbb{P}^n$ をある超平面 H に含まれる非特異射影多様体とし, $\pi\colon X \to \mathbb{P}^n$ を Z に沿った爆発とする．$\mathcal{K}$ として, Z と一点で交わる直線の狭義変換の族を取る．$x \in X \setminus \pi^{-1}(H)$ に対して $\mathcal{C}_x$ は ($\pi(x)$ を通り Z と交わる直線全体が Z 上の錐をなすことから), Z に同型である．

5.3. $\tau\colon \mathcal{U} \dashrightarrow \mathcal{C}$ **の双有理性の証明とその周辺.** VMRT の理論は未だ開発途上にあり基礎付けの問題がたくさん残っている．ここでは Hwang-Mok による次の fundamental な結果の証明を振り返り, そこから提起される他の基礎付けの問題について述べる．なお, 以下で挙げた問題[68]は
J. Hwang, *Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds*, School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste, 2000), 335–393, ICTP Lect. Notes, 6, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2001
の 5 章から取った．

定理 12. 非特異射影単線織多様体に対して $\tau\colon \mathcal{U} \dashrightarrow \mathcal{C}$ は双有理写像である．すなわち, 一般の点を通る極小成分に属する有理曲線の接ベクトルは一般に互いに異なる．

一般点 $x \in X$ については, $\mathcal{K}_x$ が非特異で $\mathcal{K}_x \to \mathcal{C}_x$ が有限射であったので, 定理 12 によって, $\mathcal{C}_x$ の正規化は非特異であることが従う．

問題 21 $(***)$. *Picard* 数 1 の非特異 *Fano* 多様体 X の一般点 x に対しては, $\mathcal{C}_x$ 自身が非特異か？X 上の有理曲線がすべて自由である時はどうか？
[69]

これが言えれば非特異射影多様体の射影幾何の過去の蓄積[70]が導入できて VMRT はより使いやすくなるはずである．
定理 12 の証明は論文
J. Hwang, N. Mok, *Birationality of the tangent map for minimal rational curves*, Asian J. Math. 8 (2004), no. 1, 51–63
において圧倒的に簡略化され, より代数幾何的になった．それに沿って概略を説明をする．定理 8 はその特別な場合と見なせるが, それが証明中効果的に使われている．

[66]特に X の Picard 数が 1 の場合が興味深い．
[67]J. Hwang, *Equivalence problem for minimal rational curves with isotrivial varieties of minimal rational tangents*, arXiv:0908.2010 の例 1.7.
[68]予想といってもよいと思うが, Hwang が問題としているのでそれに従った．
[69]$\dim \mathcal{C}_x = 0$ ならば $\mathcal{C}_x$ は連結でないこともある．しかし, 正の次元を持てば連結とも予想されている．
[70]F. Zak の重要な諸結果など．

定理 12 の証明の概略. $\mathcal{U}$ 上には $\rho\colon \mathcal{U} \to \mathcal{K}$ のファイバーを葉とする葉層構造が入っているが，それを τ によって $\mathcal{C}$ に写すことで $\mathcal{C}$ 上に一般には多価な葉層構造 $\mathcal{F}$ が入る．τ が双有理的であるということはまさに $\mathcal{F}$ が一価であるということに他ならない．

一般点 $x \in X$ に対して $p' := \dim \mathcal{C}_x$ とおき，$\widehat{T}^{\alpha}_{\mathcal{C}_{\pi(\alpha)}}$ で $\mathcal{C}_{\pi(\alpha)}$ の α における接空間に対応する $T_X^{\pi(\alpha)}$ の $p'+1$ 次元部分空間を表すことにする．$\mathcal{K}$ に属する一般的な有理曲線 C に対して，f を C の正規化と C の X への埋め込みの合成とすると，$f^*T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus p} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-1-p}$ となっていることを3章で見た．C の一般点 x における C の接ベクトル α に対して，f^*T_X の部分層 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus p}$ がまさに $\widehat{T}^{\alpha}_{\mathcal{C}_{\pi(\alpha)}}$ に対応している.[71] 特に $p = p'$ である．

$\widehat{T}^{\alpha}_{\mathcal{C}_{\pi(\alpha)}}$ を用いて $\mathcal{C}$ 上の distribution $\mathcal{P}$ を，$\mathcal{C}$ の一般点 α において $\mathcal{P}^{\alpha} = (d\pi)^{-1}(\widehat{T}^{\alpha}_{\mathcal{C}_{\pi(\alpha)}}) \subset T^{\alpha}_{\mathcal{C}}$ として定める，ここで，$d\pi$ は π の α における接写像である．$\mathcal{P}$ は一般に可積分条件を満たさないが，$\mathcal{P}$ の subdistribution

$$\mathrm{Ch}\,(\mathcal{P})^{\alpha} := \{p \in \mathcal{P}^{\alpha} \mid [p, \mathcal{P}^{\alpha}] = 0\}$$

は Jacobi 律と Frobenius の定理から簡単に分かるように可積分になる．S を $\mathrm{Ch}\,(\mathcal{P})$ の一般の葉とするとき S の構造を決定することで，$\mathcal{F}$ の一価性を示す．$\mathcal{P}$ はその定義から $\mathcal{C}_x$ の Gauss 写像 $\mathcal{C}_x \dashrightarrow G(p+1, T_X^x)$ $(\alpha \mapsto \widehat{T}^{\alpha}_{\mathcal{C}_x})$ と関係があるが，Gauss 写像のファイバーと $\mathcal{F}$ により完全に決定されることを見る．S の古典位相に関する閉包が代数的であることもその時点で分かる.[72]

$\mathcal{P}$ は $\tau\colon \mathcal{U} \dashrightarrow \mathcal{C}$ を通して，次のような $\mathcal{U}$ 上の distribution $\mathcal{R}$ に対応している．上記のように $\mathcal{K}$ に属する一般的な有理曲線 C をとると，3 章で見たように，$\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ は $[f]$ で非特異であり，$[f]$ における接空間は $H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X)$ に同型，また，$\mathcal{K}$ は C に対応する点 $[C]$ で非特異であり，$[C]$ における接空間は $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus p} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-1-p})$ に同型である．この部分空間 $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus p})$ によって定まる $\mathcal{K}$ の distribution を $d\rho$ で引き戻して得られる $\mathcal{U}$ 上の distribution を $\mathcal{R}$ とする．構成から，$\mathcal{R}$ と $\mathcal{P}$ は τ を通して対応している．

$\mathcal{F}$ は多価であっても $\mathcal{C}$ の一般点で局所解析的には一価な葉層構造を選ぶことができる．これを $\mathcal{F}'$ で表すことにする．$\mathcal{V}$ を $\pi\colon \mathcal{C} \to X$ のファイバーを葉とする葉層構造，$\mathcal{J}$ を $\mathcal{C}$ の一般点 α において，$\mathcal{J}^{\alpha} = (d\pi)^{-1}(\mathbb{C}\alpha)$ として定まる distribution[73]とする．$\alpha \in \mathcal{U}$ を通る $\mathcal{F}'$ の葉を X に落とすと α を接ベクトルに持つ $\mathcal{K}$ に属する有理曲線になることから，(局所解析的に)$\mathcal{V} + \mathcal{F}' = \mathcal{J}$ が成り立っていることが分かる．これにより局所的計算から，

$$\mathcal{P} = \mathcal{V} + \mathcal{F}' + [\mathcal{F}', \mathcal{V}] \tag{5.1}$$

が確かめられる．また，$\mathcal{R}$ に対して $\mathrm{Ch}\,(\mathcal{R})$ を $\mathrm{Ch}\,(\mathcal{P})$ と同様に定めると，$\mathcal{F}$ が ρ のファイバーを葉とする葉層構造であることから，$\mathcal{F} \subset \mathrm{Ch}\,(\mathcal{R})$ が確認でき，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{R}$ の対応から，$\mathcal{F}' \subset \mathrm{Ch}\,(\mathcal{P})$ が従う．これにより，Gauss 写像のファイバーを葉とする $\mathcal{V}$ の部分葉層構造を $\mathcal{G}$ とすると $\mathcal{G} = \mathrm{Ch}\,(\mathcal{P}) \cap \mathcal{V}$ が成立することが分かる.[74] さらに (5.1) から，$\mathrm{Ch}\,(\mathcal{P}) = \mathcal{G} + \mathcal{F}' + [\mathcal{F}', \mathcal{G}]$ が確かめられる．これにより，Gauss 写像のファイバーの次元，つまり，$\mathrm{rank}\,\mathcal{G}$ を $k-1$ とすると，$\mathrm{rank}\,\mathrm{Ch}\,(\mathcal{P}) = 2k-1$ となることが分かる．よって，$T = \pi(S)$ とおくと $\dim T = k$ であるが，$\alpha \in \mathcal{C}$ における $\mathcal{F}'$ の葉を π で移すと，α を接ベクトルに持つ $\mathcal{K}$ に属する有理曲線 C になることから，C は T の古典位相に関する閉包 $\overline{T}$ に含まれる．よって T の開集合 T^0 があって S の一般点は $\mathbb{P}(T^*_{T^0})$ に含まれるが，上記の次元計算より $\mathbb{P}(T^*_{T^0}) \cap S$ は $\mathbb{P}(T^*_{T^0})$ の開集合であ

[71]この見方によって，以下で定義する $\mathcal{P}$ と $\mathcal{R}$ との対応が分かる．

[72]論文の著者の一人 N. Mok さんに教わった．

[73]$\mathbb{C}\alpha$ は α に対応する $T_X^{\pi(\alpha)}$ の 1 次元部分空間を表す．

[74]Gauss 写像の接写像を表す第二基本形式を計算する．

る．ここで T の一般点 t をとる．$\overline{T}$ は，t を通る Gauss 写像のファイバーによって接ベクトルが決まる有理曲線で覆わている．Gauss 写像が代数的だから $\overline{T}$ も代数的であることが分かる．$\mathcal{K}^T \subset \mathcal{K}$ を $\mathcal{K}$ に属する有理曲線で $\overline{T}$ に含まれるものに対応する部分スキーム，$\mathcal{U}^T$ を $\mathcal{U}$ の $\mathcal{K}^T$ 上への制限とする．このとき $\mathcal{K}^T$ は既約で $\overline{T}$ の有理曲線族の極小成分，VMRT の全空間 $\mathcal{C}^T$ から $\overline{T}$ への射影の一般点 $t \in T$ 上のファイバーは $\mathbb{P}_*(T^t_{\overline{T}})$ に一致する．こうして $\overline{T}$ の正規化 $\overline{T}^n$ に定理 8 を適用することができ，$\mathrm{Sing}\,\overline{T}^n$ の外で不分岐な有限射 $\mathbb{P}^k \to \overline{T}^n$ が存在する．多価かもしれない葉層構造 $\mathcal{F}$ の局所的なすべての葉はひとつの $\mathrm{Ch}\,(\mathcal{P})$ の葉 S に含まれる．ところが，定理 8 の帰結から，$\mathcal{U}^T \dashrightarrow \mathcal{K}^T$ は双有理的だから $\mathcal{F}$ は一価でなければならない．□

定理 12 の証明中得られた $\overline{T}$ のことを **Cauchy 部分多様体**という．これはその一般点 t における接空間 $T^t_{\overline{T}}$ の射影化が $\mathcal{C}_t$ の Gauss 写像の一つのファイバーになっているような部分多様体である．もし，問題 21 が正しければ，Zak の定理により，線形多様体の非連結和でない $\mathcal{C}_x$ の Gauss 射は有限射であるから，S は $\mathcal{F}$ の葉に他ならず，Cauchy 部分多様体は $\mathcal{K}$ に属する有理曲線に他ならない．

$\mathcal{C}_x$ が線形成分を持てばすべて線形であるが，この時は Cauchy 部分多様体は非自明 ($\mathcal{F}$ の葉ではないということ) となる．これに関して次の予想がある．

問題 22 (**). *Picard* 数 1 の非特異 *Fano* 多様体 X の一般点 x を通る *Cauchy* 部分多様体が二次元以上ならば射影空間と同型か？

次の問題の方がよりとっつきやすいかもしれない．

問題 23 (**). *Picard* 数 1 の非特異 *Fano* 多様体 X の一般点 x において，$\dim \mathcal{C}_x \geq 1$ が成り立ち，$\mathcal{C}_x$ が線形多様体の和集合であるならば，X は射影空間であるか？[75]

これは定理 8 の一般化である．この予想に関しては，次の結果が知られている．

定理 13. 非特異射影多様体 X の一般点 x において，$p := \dim \mathcal{C}_x \geq 1$ が成り立ち，$\mathcal{C}_x$ が線形多様体であるとするとき次が成り立つ．ある X の空でない *Zariski* 開集合 X^0 があって，X^0 は $\mathbb{P}^{p+1}$-束の構造 $\varphi\colon X^0 \to T^0$ を持つ．さらに，X^0 と交わるような $\mathcal{K}$ に属する有理曲線は φ のファイバー内の直線である．

C. Araujo, *Rational curves of minimal degree and characterizations of projective spaces*, Math. Ann. 335 (2006), no. 4, 937–951
この状況では，$\mathbb{P}^{p+1}$-束のファイバーがまさに Cauchy 部分多様体である．この定理の応用として，Andreatta-Wiśniewski の定理「非特異射影多様体 X は，T_X が豊富な部分束を含めば射影空間と同型である」の新証明[76]が得られる．

結局，Cauchy 部分多様体は，射影空間の場合を除いて理論上でのみ大きくなり得る部分多様体に過ぎないと予想される．しかし，概念的には確かに重要で，上記論文 [HM] では，定理 12 の証明だけでなく，次の Lazarsfeld 予想の新証明にも応用されている．

定理 14. *Picard* 数 1 の有理等質多様体 G/P から正の次元を持つ非特異射影多様体 X への全射 $f\colon G/P \to X$ があれば，$X \simeq \mathbb{P}^n$，または，f は双正則である．[77]

[75]正しければ，結局，$\mathcal{C}_x = \mathbb{P}_*(T^x_X)$ である．
[76]これは定理 8 から直ちに出るわけではない．
[77]Picard 数 2 以上でも正しい．C. Lau, *Holomorphic maps from rational homogeneous spaces onto projective manifolds*, J. Algebraic Geom. **18** (2009), no. 2, 223–256

謝辞. 高山茂晴さんは, 講演の機会を与えてくださり, また, 原稿にも目を通してくださいました. ありがとうございました. 小林正典さんには講演中, 中村亨さんの修士論文の存在を教えていただきました. ありがとうございました. 佐藤拓さんにはフリップ型の縮小写像しか持たない非特異 4 次元 Fano 多様体の例を教えていただきました. ありがとうございました. 月岡透さんには講演中に誤りを指摘してくださり, また, 個人的にノートも送ってくださいました. また, 向井予想の専門家として貴重なご意見をいただきました. ありがとうございました. 渡辺究さんには, 原稿に目を通していただき, VMRT の専門家として貴重なご意見をいただきました. どうもありがとうございました. また N. Mok さんには VMRT に関する質問に丁寧に答えていただきました. ありがとうございました.

〒 153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
E-mail address: takagi@ms.u-tokyo.ac.jp